20

Berthelin, page 87/89

page 460

Théorèmes de Cauchy-Lipschitz linéaire et global

Lemme (cas linéaire) Soient $\alpha, \beta \geq 0$, $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue, $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continue.
Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t).y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution sur I.

Lemme (cas global) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$, $\alpha, \beta \geq 0$ et $r_0 \in]0, +\infty]$. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$.
Soit $f : I \times \bar{B}(y_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, uniformément par rapport à la première variable. On définit pour $y \in \tilde{E} = C(I, \bar{B}(y_0, r_0))$
$\Phi(y) : t \in I \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$. On suppose que $\Phi(y) \in \tilde{E}$ pour $y \in \tilde{E}$.
Alors il existe une solution globale.

Cas linéaire :
Posons
$k := \sup_{t \in I} |||A(t)||| < +\infty$ comme borne supérieure d'une fonction continue sur un compact.

Cas global :
Par hypothèse, il existe un réel $k > 0$ tel que :
$\forall y_1, y_2 \in \bar{B}(y_0, r_0)$, $\forall t \in I$, $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$ — car globalement lips. en la 2^{nde} variable

Munissons $E = C(I, \mathbb{K}^n)$ de la norme $\|.\|_e : y \longmapsto \sup_{t \in I} \|y(t)\| e^{-k|t - t_0|}$.
Les normes $\|.\|_e$ et $\|.\|_E$ sont équivalentes :
$0 \leq e^{-k\max(\alpha, \beta)} \leq e^{-k|t - t_0|} \leq 1$ donc $e^{-k\max(\alpha,\beta)} \|y\|_E \leq \|y\|_e \leq \|y\|_E$
Ainsi, muni de $\|.\|_e$ l'espace E est complet (donc $\tilde{E}$ aussi pour le cas global).

Soient $y, \tilde{y} \in E$, $t \geq t_0$ avec $t \in I$,
$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(\tilde{y})(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)(y(s) - \tilde{y}(s))\| ds \leq \int_{t_0}^{t} |||A(s)|||\, \|y(s) - \tilde{y}(s)\|\, ds$$

Soient $y, \tilde{y} \in \tilde{E}$, $t \geq t_0$ avec $t \in I$,
$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(\tilde{y})(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\| ds$$

Donc :
$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(\tilde{y})(t)\| e^{-k|t - t_0|} \leq k \int_{t_0}^{t} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|\, ds\, e^{-k(t - t_0)}$$
$$\leq k \|y - \tilde{y}\|_e \int_{t_0}^{t} e^{k|s - t_0|} ds \,.\, e^{-k(t - t_0)}$$
car $\|y(s) - \tilde{y}(s)\| = \|y(s) - \tilde{y}(s)\| \times e^{-k|s - t_0|} e^{k|s - t_0|} \leq \|y - \tilde{y}\|_e e^{k|s - t_0|}$
$$= k \|y - \tilde{y}\|_e \frac{1 - e^{-k(t - t_0)}}{k} = \|y - \tilde{y}\|_e (1 - e^{-k(t - t_0)})$$

De manière analogue, pour $t < t_0$,
$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(\tilde{y})(t)\| e^{-k|t - t_0|} \leq \|y - \tilde{y}\|_e (1 - e^{-k(t_0 - t)}) \leq \|y - \tilde{y}\|_e (1 - e^{-k\max(\alpha, \beta)})$$
D'où en prenant la borne sup,
$$\|\Phi(y) - \Phi(\tilde{y})\|_e \leq \|y - \tilde{y}\|_e (1 - e^{-k\max(\alpha,\beta)}).$$
Alors,
Φ est contractante, en utilisant le théorème de point fixe de Picard, Φ admet donc un unique point fixe. — car $(1 - e^{-k\max(\alpha,\beta)}) < 1$

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in C(I, \mathbb{K}^n)$.
Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ alors le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur I.

Théorème (Cauchy-Lipschitz global) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable uniformément par rapport à la première variable. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy admet une solution globale qui est unique.

- Supposons que I soit un segment alors $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$

Cas linéaire :
On applique le lemme, ce qui assure l'existence d'une solution.

Cas global :
On applique le lemme avec $r_0 = +\infty$. Il faut montrer $\Phi(\tilde{E}) \subset \tilde{E}$.
Ceci est évident car y est continue sur I donc :
$\Phi(y) : t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$ continue comme primitive d'une fonction continue.

Montrons l'unicité dans ce cas :

On applique le lemme de Gronwall, en considérant y et z deux solutions, avec :

$u : t \longmapsto \|y(t) - z(t)\|$, $a = 0$ et $v = |||A|||$ | $u : t \longmapsto \|y(t) - z(t)\|$, $a = 0$, et $v = k$

On obtient :

$\|y(t) - z(t)\| \leqslant 0$ pour tout $t \in I$, ce qui permet de conclure.

- Supposons que I soit un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Montrons l'unicité :

soient $y, z : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ deux solutions et $t \in I$, il existe alors $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $t \in J = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$.

On a alors pour tout $s \in J$, $y(s) = z(s)$ donc $y(t) = z(t)$. par l'unicité dans le cas compact

Ceci étant vrai pour tout $t \in I$, $y = z$. La solution est bien unique.

Montrons l'existence :

pour tout compact $J \subset I$, on a une solution unique y_J sur J

Pour tout $t \in I$, on pose

$y(t) = y_J(t)$ où $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$ contenant t

Il s'agit bien d'une solution.